

8 Лекция

Бір нүктесі бекітілген қатты дененің қозғалысы

8.1 Гироскоп. Эйлер теңдеулері

8.2 Нутация.

Өз симметрия өсін тез айналуға келтірілген аксиал симметриялы денені *гироскоп* деп атайды. Тікелей аударғанда гироскоп *айнаруды табатын аспап* деген мағына білдіреді. Жалпы мағынада гироскоп дегеніміз – айналу өсі кеңістікте бағытын өзгерте алатын шапшаң айналған қатты дене. Гироскопқа мысал ретінде зырылдауықты, центрі арқылы өткен, бетіне перпендикуляр өсте өте тез айналған дискіні келтіруге болады. Гироскоптың тез айналуымен байланысты барлық құбылыстар *гироскоптық* деп аталады.

Гироскоп айналуының негізгі заңдарын анықтау үшін оны массалар центрінде бекіткен ыңғайлы (ары қарай гироскоп ретінде тез айналатын дискіні қарастырамыз). Қажетті бекіту гироскоп осіне үш өзара перпендикуляр бағытта бағдарын еркін өзгертуге мүмкіндік беретін Кардан аспасы көмегімен жүргізіледі. Егер барлық үш өстегі подшипниктердегі үйкелесті және сақиналардың импульс моментін ескермеу шарты орындалса, мұндай гироскоп *еркін* деп аталады. Қатты дене бекітілген нүктенің төңірегінде қозғалғанда бұрыштық жылдамдық векторы жалпы жағдайда кеңістіктегі бағытын және денеге салыстырмалы бағдарын өзгертеді, яғни айналу лездік өсі өзінің бағдарын өзгертеді. Координаталық жүйенің бастама нүктесін дене бекітілген нүктеде – инерция центрінде орналастырайық. Координаталық өстерді инерцияның бас өстерінің бойымен бағыттаймыз. Бұл жағдайда инерция тензоры өзінің үш I_1, I_2, I_3 бас компоненталарымен өрнектеледі, ал импульс моменті тіпті қарапайым түрге келеді: $L_1 = I_1 \omega_1$; $L_2 = I_2 \omega_2$; $L_3 = I_3 \omega_3$. Мұндағы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - бұрыштық жылдамдық векторының денемен бірге қозғалған координаталар өстеріне проекциялары.

Гироскоптың $\vec{L}$ импульс моментін қозғалатын санақ жүйесіндегі компоненталары арқылы өрнектейміз:

$$\vec{L} = \vec{i}_x L_x + \vec{i}_y L_y + \vec{i}_z L_z,$$

немесе

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{i}_x \frac{dL_x}{dt} + \vec{i}_y \frac{dL_y}{dt} + \vec{i}_z \frac{dL_z}{dt} + \frac{d\vec{i}_x}{dt} L_x + \frac{d\vec{i}_y}{dt} L_y + \frac{d\vec{i}_z}{dt} L_z \quad (121)$$

Осы теңдеудегі соңғы үш мүшені былай жазуға болады:

$$\frac{d\vec{i}_x}{dt} L_x + \frac{d\vec{i}_y}{dt} L_y + \frac{d\vec{i}_z}{dt} L_z = (\vec{\omega} \times \vec{L}).$$

Ал, (121)-дің оң жағындағы бірінші үш мүше - $\frac{\partial \vec{L}}{\partial t}$ -ге тең. Сонымен, (121)

теңдеу

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + (\vec{\omega} \times \vec{L}) \quad (122)$$

түрге келеді, немесе

$$\vec{M} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + (\vec{\omega} \times \vec{L}) \quad (123)$$

теңдеуін аламыз.

(123) теңдеудің қозғалатын координаталар жүйесіндегі проекциялары мына түрде болады:

$$\begin{aligned} M_x &= I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z; \\ M_y &= I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x; \\ M_z &= I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y. \end{aligned} \quad (124)$$

Алынған теңдеулерді *Эйлер теңдеулері* деп атайды. Жалпы жағдайда олар бір нүктесі бекітілген қатты дененің қозғалысын анықтайды.

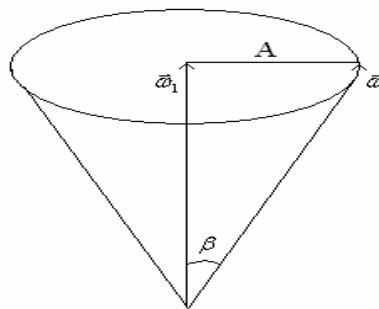
(124) қатынастарды еркін гироскоп үшін жазып шығайық. Гироскоптың симметрия өсі бойында x өсі орналасып, ал y және z өстері қалған екі центрлік бас өстер бойымен бағытталсын. Гироскоптың симметриясынан $I_x = I_1; I_y = I_z = I_2$ екені айқын. Онда еркін гироскоп ($M=0$) үшін (124) теңдеулер

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_x}{dt} &= 0; \\ I_2 \frac{d\omega_y}{dt} + (I_1 - I_2)\omega_z\omega_x &= 0; \\ I_2 \frac{d\omega_z}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_x\omega_y &= 0 \end{aligned} \quad (125)$$

түрге келеді. Бірінші теңдеуден $\omega_x = \omega_1 = \text{const}$ екенің көреміз, яғни $\vec{\omega}$ -ның гироскоптық симметрия осіне проекциясы уақыт бойынша тұрақты болады. Енді (125) жүйенің екінші және үшінші теңдеулерін түрлендірейік:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_0\omega_x &= 0; \\ \frac{d\omega_z}{dt} - \omega_y\omega_0 &= 0, \end{aligned} \quad (126)$$

мұнда $\omega_0 = \omega_1 \frac{I_1 - I_2}{I_1}$ - тұрақты шама. Бұл теңдеулердің шешімдері ретінде



10 Сурет.

$$\begin{aligned}\omega_y &= A \cos \omega_0 t; \\ \omega_z &= A \sin \omega_0 t\end{aligned}\tag{127}$$

функцияларын алуға болады.

(127) шешімдерді талдай отырып, $\vec{\omega}$ вектор шамасын тұрақты сақтап, гироскоптың симметрия осін айнала жылдамдықпен конус сызатыны туралы қорытындыға келеміз (10 сурет). Шешімдер құрамындағы A шама ($A = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2}$) бастапқы шарттарға тәуелді. Конустық бұрыш A/ω_1 қатынасымен анықталады, ω_0/ω_1 шама инерцияның бас моменттерінің қатынасына, яғни гироскоп массасының үлестірілуіне тәуелді. Қорыта келе еркін гироскоптың қозғалысын былай суреттеге болады: $\vec{\omega}$ лездік жылдамдық және симметрия өсі жатқан жазықтық $\vec{L}$ векторын $\vec{\omega}_0$ бұрыштық жылдамдықпен айналады және айналу барасында $\vec{\omega}$ векторы мен симметрия өсінің өзара салыстырмалы орындары өзгермейді. Симметрия өсінің кеңістікте қозғалмайтын $\vec{L}$ импульс моменті векторын айнала қозғалуын *нутация* дейді, ал $\vec{\omega}_0$ - нутация жылдамдығы. Нутация амплитудасы бастапқы шарттарға тәуелді. Егер гироскоптың бұрыштық жылдамдық векторы симметрия өсінде жатса, ол нутациясыз айналады.